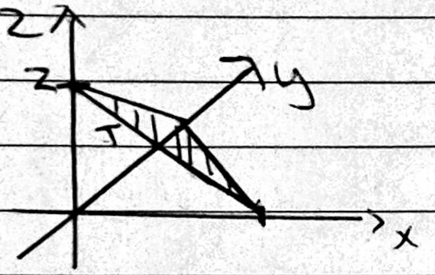
28/04/2017

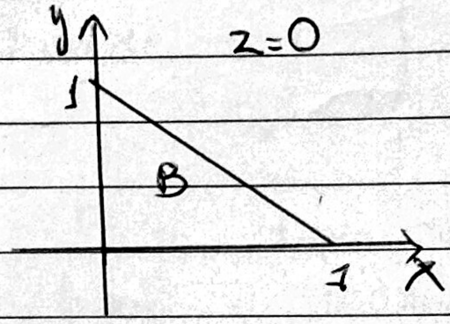
Μάθημα 12ο (Αναπλήρωση)
Απε: 4

Υπολογισμός μέσω κανονικών χωρίων (συνέχεια)

Άσκηση 198: Υπολογίστε τον όγκο του τετραέδρου που περικλείεται από τα τρία επίπεδα συντεταγμένων και το επίπεδο $z = 2-2x-2y$

Λύση





$z=0$: $2-2x-2y=0 \iff 1-x=y$

Άρα: $T = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in B,\ 0 \le z \le 2-2x-2y \}$
$B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ 0 \le y \le 1-x \}$

$\Rightarrow$ B κανονικό χωρίο $\overbrace{\text{ως προς } Ox}^{\Rightarrow B \subset \mathbb{R}^2}$, T κανονικό χωρίο ως προς $\underset{T \subset \mathbb{R}^3}{Oxy} \Rightarrow V(T) = \int_T 1 \cdot d(x,y,z) = \int_B \left(\int_0^{2-2x-2y} 1 \, dz \right) d(x,y) =$

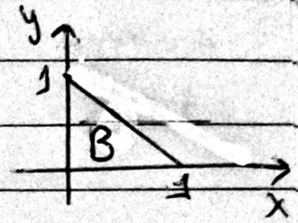
$$= \int_B (2-2x-2y)\, d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (2-2x-2y)\, dy \right) dx =$$

$$= \dots = \frac{2}{3}$$

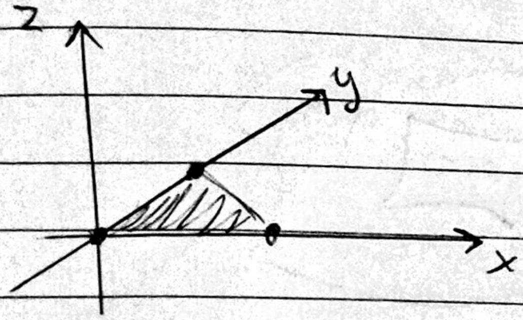
Άσκηση 129

Υπολογίστε τον όγκο του σώματος που περικλείεται από το (υπερβολικό παραβολοειδές) $z = xy$, το τρίγωνο με γωνίες $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ και το επίπεδο $x+y=1$.

Λύση



$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y)\in B,\ 0 \le z \le xy\}$$



$$B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}.$$

$$\Rightarrow V(\Sigma) = \int_\Sigma 1\, d(x,y,z) =$$

$$= \int_B \underbrace{\left(\int_0^{xy} 1\, dz\right)}_{=xy} d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy\, dy\right) dx = \dots = \frac{1}{24}$$

Υπενθύμιση (ΑΠΙΙ): Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητής:

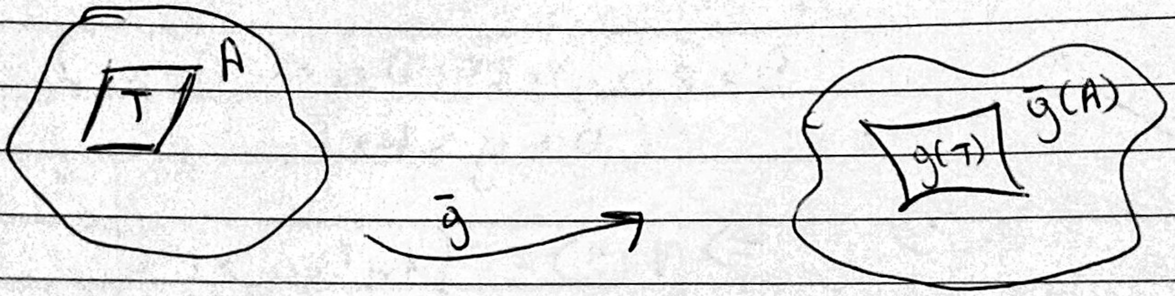
$f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής και $g:[a,\beta]\to[A,B]$ 1-1, και επί, C^1 $\Longrightarrow \int_a^\beta f(g(y))\,g'(y)\,dy = \int_{g(a)}^{g(\beta)} f(x)\,dx$

με $g'(y)\neq 0\ \forall y\in[a,\beta] \iff \begin{cases} \{g'(y)>0\ \forall y\in[a,\beta]\} \\ \{g'(y)<0\ \forall y\in[a,\beta]\}. \end{cases}$

$$\Longrightarrow \int_{[a,\beta]} f(g(y))\,|g'(y)|\,dy = \int_{[A,B]} f(x)\,dx$$

Θεώρημα (ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΛΛΑΓΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ - ΚΑΜ)

Έστω $A\subset\mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $\bar{g}: A\to\mathbb{R}^n$ 1-1 και C^1, όπου $\det D\bar{g}(\bar{y})>0\ \forall \bar{y}\in A$, $\det D\bar{g}(\bar{y})<0\ \forall \bar{y}\in A$
$T\subset A$ Jordan-μετρήσιμο και συμπαγές και $f:\bar{g}(T)\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε το $\bar{g}(T)\subset\mathbb{R}^n$ είναι Jordan-μετρήσιμο και συμπαγές (με $\partial\bar{g}(T)=\bar{g}(\partial T)$)



και ισχύει
$$\int_{\bar{g}(T)} f(\bar{x})\,d\bar{x} = \int_T f(\bar{g}(\bar{y}))\,|\det D\bar{g}(\bar{y})|\,d\bar{y}$$

▲ Τέσσερις περιπτώσεις $\bar{g}$ που χρησιμοποιούνται:

(A). Ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός: $\bar{g}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ($\forall n\in\mathbb{N}$!)

$\bar{x}=\bar{g}(\bar{y})=A\bar{y}+\bar{b}$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ με $\det A\neq 0$, $\bar{b}\in\mathbb{R}^n$

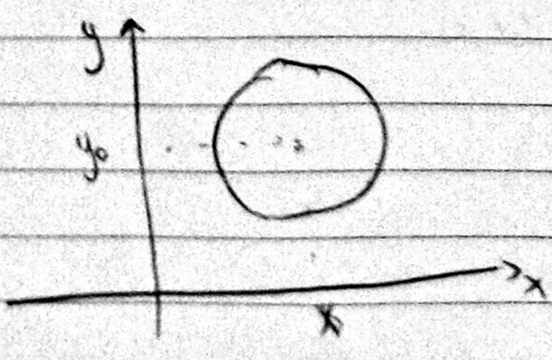
$\Rightarrow D\bar{g}(\bar{y})=A$ και $\bar{y}=\bar{g}^{-1}(\bar{x})=A^{-1}\bar{x}-A^{-1}\bar{b}$

$$\xRightarrow{KAM} \int_{AT+\bar{b}} f(\bar{x})\,d\bar{x} = |\det A|\int_T f(A\bar{y}+\bar{b})\,d\bar{y}$$

$\boxed{AT+\bar{b}} := \{A\bar{y}+\bar{b} : \bar{y}\in T\}$

πχ $V(\Delta)=;$

$\Delta=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \overbrace{(x-x_0)}^{“x'”}{}^2+\overbrace{(y-y_0)}^{“y'”}{}^2<r^2\}$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \bar{g}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ΚΑΜ (A)}}$$

$$\Rightarrow V(\Delta) = \int_{\bar{g}^{-1}(\Delta)} 1 \, d(x', y')$$

$$\bar{g}^{-1}(\Delta) = \left\{ \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left((x,y) \in \Delta \Leftrightarrow \right) \right.$$

$$\left. (x')^2 + (y')^2 \leq r^2 \right\} = \{ (x', y') \in \mathbb{R}^2 : (x')^2 + (y')^2 \leq r^2 \}$$

(B) Πολικές Συντεταγμένες (προφανώς, στον $\mathbb{R}^2$)

$$\bar{g} : (0, \infty) \times (0, 2\pi) =: A_\pi \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \bar{g}(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$D\bar{g}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{g} \; C^1, \quad \det D\bar{g}(r, \varphi) = r > 0 \quad \forall (r, \varphi) \in A_\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\det D\bar{g}(r, \varphi)| = r$$

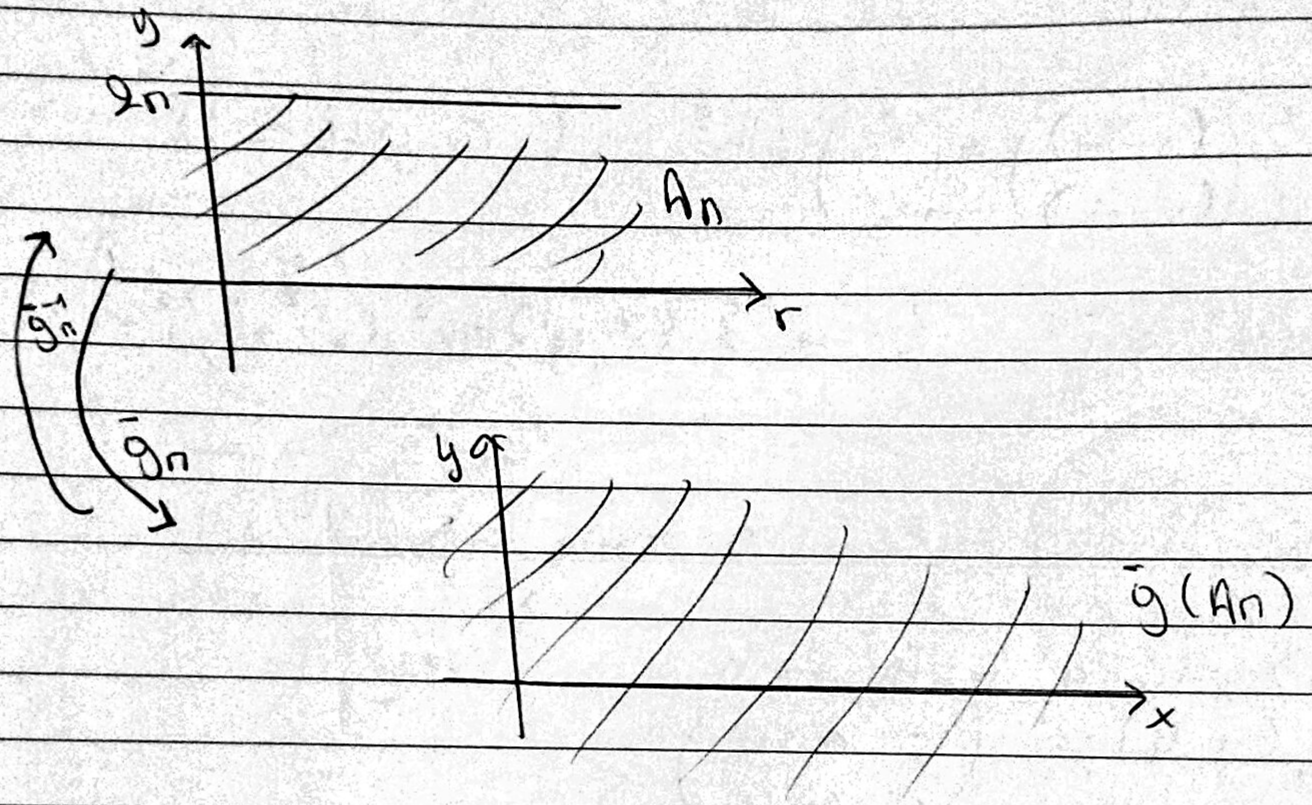
$$x^2 + y^2 = r^2 \overset{r>0}{\Rightarrow} r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{y}{x} \overset{x>0}{=} \tan\varphi$$

$$\Rightarrow \varphi = \arctan\frac{y}{x} = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

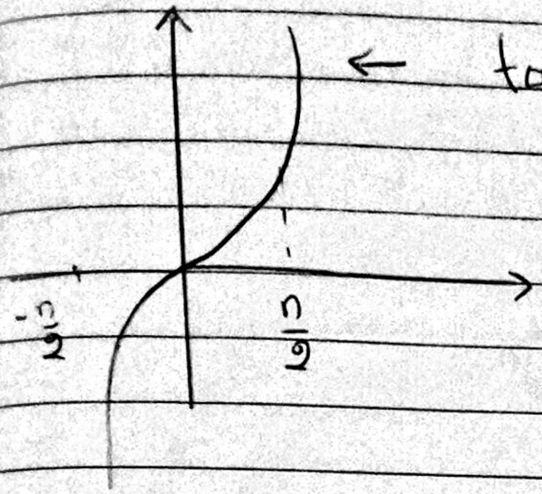
(Συνέχεια) $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \bar{g}^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi(x,y) \end{pmatrix}$

$\forall (x,y) = \bar{g}(A_n) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}$

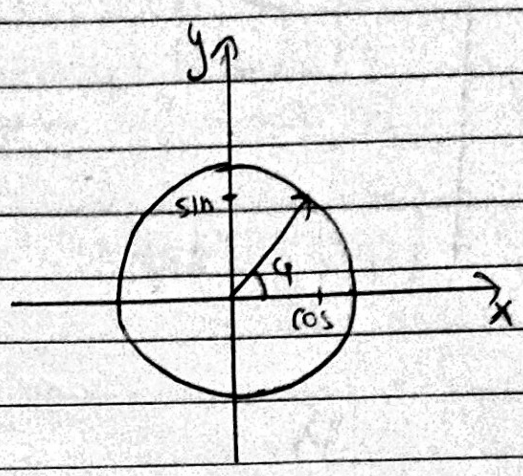


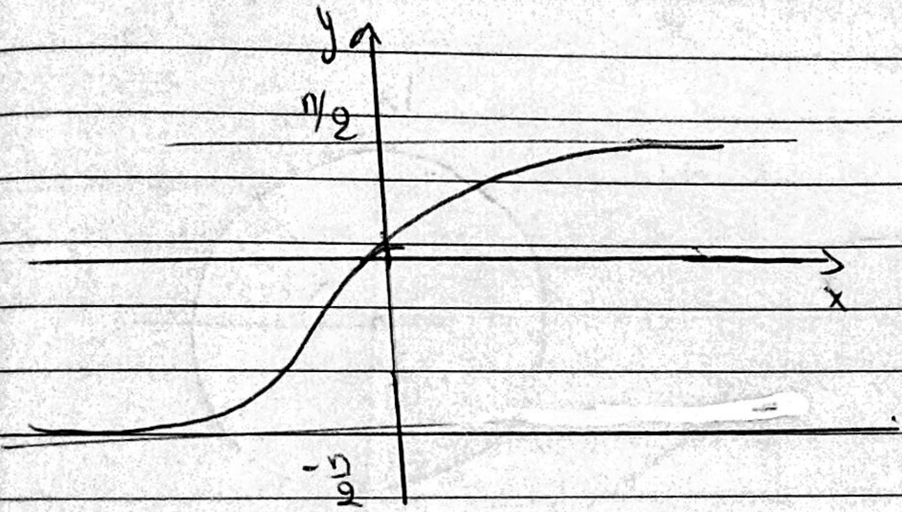
$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & , x>0 \ , y>0 \\ \frac{\pi}{2} & , x=0 \ , y>0 \\ \pi + \arctan\frac{y}{x} & , x<0 \ , y = \mathbb{R} \\ \frac{3\pi}{2} & , x=0 \ , y<0 \\ 2\pi + \arctan\frac{y}{x} & , x>0 \ , y<0 \end{cases}$$

όπου $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$





$\arctan = \tan^{-1}$

$\mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

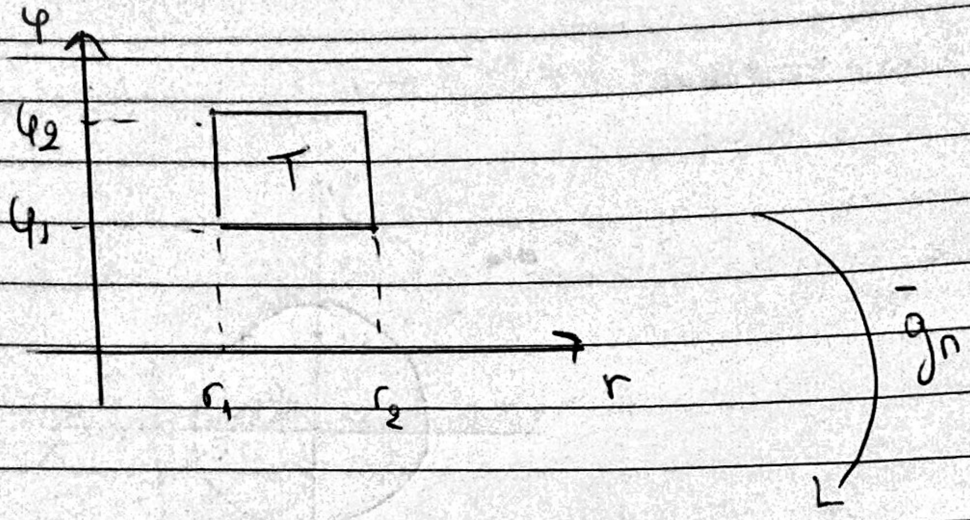
με $\varphi(x,y) \xrightarrow[\substack{y \downarrow 0 \\ x>0}]{} 0$

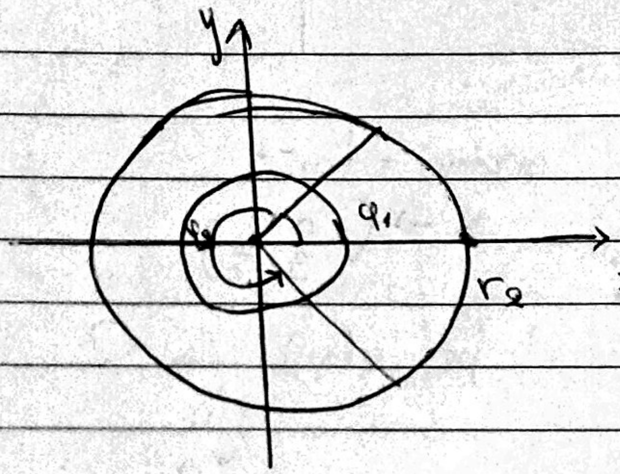
αλλά $\varphi(x,y) \xrightarrow[\substack{y\uparrow 0 \\ x>0}]{} 2\pi$

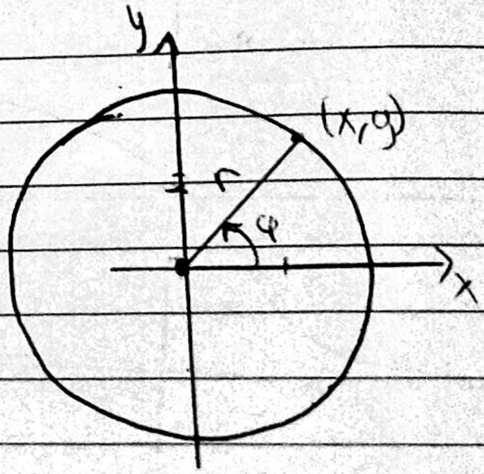
Άρα η $\bar{g}: A_\pi \to \bar{g}(A_\pi) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0): x \geq 0\}$
είναι 1-1 και επί, C^1 με αντίστροφη $\bar{g}^{-1}: \bar{g}(A_\pi) \to A_\pi$
όπως πιο πάνω C^1 (αφού ειδικότερα:
$\det D\bar{g}(r,\varphi) = r > 0 \ (\neq 0) \ \forall (r,\varphi) \in A_\pi$

Από τον κανόνα αλλαγής μεταβλητής έχουμε ειδικότερα για
$T = [r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2] \subset A_\pi$ τον τύπο:

$$\int_{\bar{g}(T)} f(x,y)\, d(x,y) = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r \, d\varphi \, dr$$







<u>Προσοχή</u>: Ο τύπος αυτός ισχύει για $T = [r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2] \subset (0,\infty) \times (0,2\pi) = A_n$

$\Rightarrow$ <u>Καταρχήν</u>, δεν ισχύει για $T = [0, r] \times [0, \varphi]$, με $g(T) = \Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq r^2\}$

<u>αλλά</u> προκύπτει λόγω συνέχειας της αριστερής και δεξιάς πλευράς του τύπου για $T_{\rho,\varphi_1,\varphi_2} = [\rho, r] \times [\varphi_1, \varphi_2]$ με $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$ και $\rho > 0$ ότι προκύπτει ως όριο όταν $\rho \downarrow 0$, $\varphi_1 \uparrow 0$, $\varphi_2 \uparrow 2\pi$

<u>Άρα</u>: για $T = [r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2] \subset [0,\infty) \times [0, 2\pi]$ ισχύει ο τύπος.

π.χ. Ο κυκλικός δίσκος $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}$

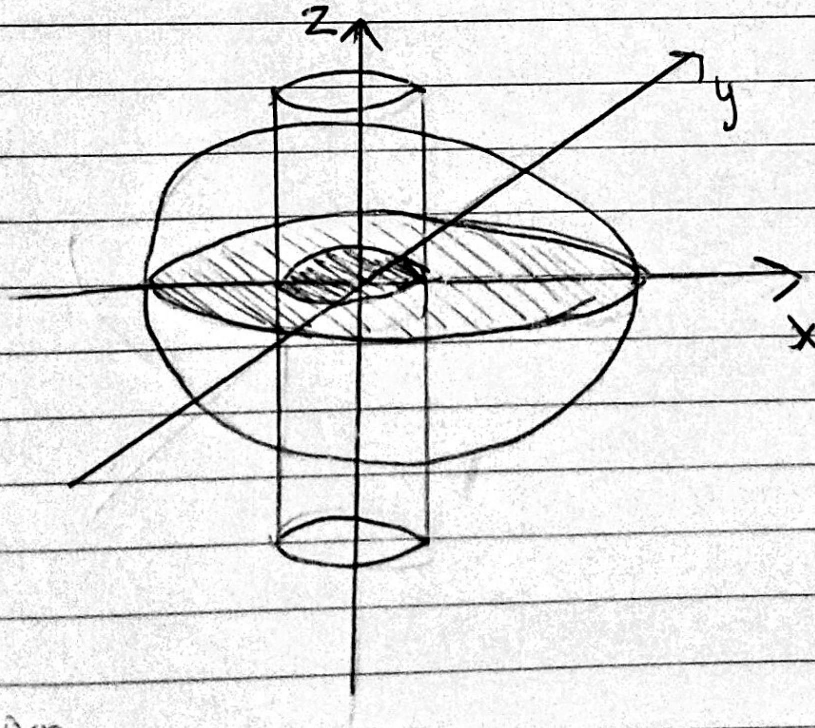
είναι η εικόνα $\bar{g}(T)$ με $T = [0,R] \times [0,2\pi]$

Άρα $V(\Delta) = \int_{\Delta = g(T)} 1 \cdot d(x,y) \overset{\text{ΚΑΜ}}{=} \int_{[0,R]\times[0,2\pi]} r \, d(r,\varphi) =$

$r = |\det D g_n(r,\varphi)|$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} r \, d\varphi \, dr = 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2$$

Άσκηση 138: Έστω Σ η τομή του κυλίνδρου $x^2+y^2 \leq R^2$ με τη μπάλα $x^2+y^2+z^2 \leq 4R^2$. Υπολογίστε το $V(\Sigma)$



Λύση

$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+y^2 \leq R^2}_{\Leftrightarrow} \wedge x^2+y^2+z^2 \leq 4R^2\}$

$(x,y) \in \Delta$, $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Delta, \underbrace{z^2 \leq 4R^2 - (x^2+y^2)}$

$\Leftrightarrow |z| \leq \sqrt{4R^2-(x^2+y^2)}$

$\Leftrightarrow |z| \leq \sqrt{4R^2 - (x^2+y^2)} \Leftrightarrow -\sqrt{4R^2-(x^2+y^2)} \leq z \leq \sqrt{4R^2-(x^2+y^2)}$

Αφού Δ κανονικό χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ ($\Rightarrow$ J-μ. και συμπαγές) και Σ κανον. χωρίο ως προς το Oxy, έχουμε

$$V(\Sigma) = \int_{\Delta} \int_{-r}^{r} 1 \, dz \, d(x,y) = 2 \int_{\Delta} \sqrt{4R^2 - \underbrace{(x^2+y^2)}_{= r^2}} \, d(x,y) \overset{\text{ΚΑΜ}}{=}$$

$$= 2 \int_0^R \int_0^{2\pi} \underbrace{\sqrt{4R^2 - r^2}}_{= \rho} \, r \, d\varphi \, dr = 4\pi \frac{1}{-2} \int_{\sqrt{4R^2}}^{\sqrt{3R^2}} \sqrt{\rho} \, d\rho = \dots =$$

$$= \frac{4\pi}{3} (8 - 3\sqrt{3}) R^3$$